

# ASUPRA CONCEPTULUI DE FAZOR SPAȚIAL REPREZENTATIV DIN MODELUL DINAMIC AL MAȘINII DE INDUCȚIE TRIFAZATE

Mircea M. RĂDULESCU

Facultatea de Inginerie Electrică, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca  
mircea.radulescu@emd.utcluj.ro

**Rezumat.** În lucrare, pe baza modelelor de comportare dinamică liniară a subsistemelor electric și magnetic ale mașinii de inducție cu înfășurare statorică simetrică trifazată și înfășurare rotorică polifazată (tip colivie) în scurtcircuit, se reprezintă, în planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii, valorile instantanee și pozițiile unghiulare polare instantanee ale amplitudinilor undelor plane progresive (învârtitoare) ale solenațiilor rezultante instantanee ale înfășurărilor mașinii și, corespunzător, se definesc fazorii spațiali reprezentativi ai mărimilor scalare instantanee de circuit electric ale înfășurărilor de fază statorice și echivalente rotorice ale mașinii. Metrica (lungimea și orientarea) acestor fazori spațiali reprezentativi permite relevarea semnificației lor fizice.

## 1. INTRODUCERE

Studiul analitic al proceselor tranzitorii din mașina de inducție (asincronă) trifazată presupune construirea și conexarea modelelor de comportare dinamică liniară a subsistemelor electric, magnetic și mecanic ale mașinii.

Astfel, comportarea subsistemului electric al mașinii de inducție trifazate cu înfășurare indusă rotorică polifazată (tip colivie simplă) în scurtcircuit, în timpul proceselor tranzitorii, este descrisă printr-un model de circuite electrice inductive, cuplate magnetic și aflate în mișcare (de rotație) relativă, corespunzător următoarelor ipoteze: (i) înfășurările de fază, statorice și rotorice ale mașinii se definesc ca elemente liniare de circuit electric de tip bobină, având conductoare electrice filiforme, mărimi de circuit electric (intensități de curenți electrici de conducție, tensiuni electrice și fluxuri magnetice totale) variabile în timp prin funcții oarecare și parametri de circuit electric concentrați (rezistențe electrice, inductanțe proprii și mutuale) constanți în timp; (ii) înfășurarea trifazată statorică se consideră cu înfășurările de fază  $A$ ,  $B$  și  $C$ , având același număr efectiv de spire, aceiași parametri de circuit electric, distribuție simetrică, sinusoidală pe suprafața cilindrică interioară (de alezaj) a armăturii feromagnetice lamelate (admisă fără creștături) a statorului, axe magnetice decalate mutual cu  $2\pi/3$  [rad el.] în sensul de succesiune a fazelor (sensul trigonometric direct) și conexiune în stea cu punctul neutru al stelei izolat, astfel că suma algebrică a intensităților instantanee ale celor trei curenți electrici statorici de fază este zero; (iii) înfășurarea rotorică polifazată (tip colivie simplă) în scurtcircuit se echivalează cu o înfășurare trifazată, conectată în stea (cu punctul neutru (fictiv) al stelei izolat) și închisă în scurtcircuit – având înfășurările de fază  $a$ ,  $b$  și  $c$ , cu aceiași parametri de circuit electric, cu distribuție simetrică, sinusoidală pe suprafața cilindrică exterioară (dinspre întrefier) a armăturii feromagnetice lamelate (admisă fără creștături) a rotorului și cu axe magnetice decalate cu  $2\pi/3$  [rad el.] în sensul de succesiune a fazelor (sensul trigonometric direct) – și se raportează (se reduce) la înfășurarea trifazată statorică.

Pentru analiza comportării subsistemului magnetic al mașinii de inducție trifazate cu înfășurare indusă rotorică polifazată (tip colivie simplă) în scurtcircuit, în timpul proceselor tranzitorii, se adoptă modelul matematic al câmpului vectorial bidimensional, plan-paralel și variabil în timp al inducției magnetice,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{t})$ : (i) definit în planul secțiunii transversale a mașinii, plan perpendicular pe axa longitudinală de simetrie cilindrică (axa fixă de rotație) a rotorului și arborelui mașinii – în fapt, planul comun al unei tole statorice și unei tole rotorice

(cu grosimi infinitezimale), care constituie două coroane circulare concentrice (în ipoteza neglijării creștăturilor prezente pe circumferințele lor dinspre întrefier) din material feromagnetic moale, fără saturație magnetică, având permeabilitate magnetică (absolută) foarte mare ( $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ ) și pierderi prin histerezis magnetic și curenți turbionari neglijabile; (ii) raportat la sistemul de coordonate spațio-temporale  $(r, \varphi, t)$ , adică de coordonate polare  $(r, \varphi)$  asociate planului secțiunii transversale a mașinii și de variabilă temporală  $t$  (după o funcție oarecare); (iii) având în regiunea de câmp corespunzătoare întrefierului mașinii – de forma coroanei circulare de grosime radială echivalentă  $\delta_e$  (care ține seama, prin factorul Carter, de efectul deschiderilor de creștătură de pe armăturile feromagnetice statorică și rotorică), de valoare constantă și suficient de redusă – doar componentă radială,  $\mathbf{B}_{\delta,r}(\varphi, t)\mathbf{e}_r$ , produsă de solenațiile instantanee rezultante ale înfășurărilor de fază statorice și rotorice, înfășurări cu distribuție sinusoidală de-a lungul circumferințelor dinspre întrefier ale celor două coroane circulare concentrice reprezentând, în planul secțiunii transversale a mașinii, armăturile feromagnetice lamelate (admise fără creștături) statorică și, respectiv, rotorică (de forma a două coroane cilindrice coaxiale, separate prin coaja cilindrică a întrefierului echivalent).

## 2. MODELUL DINAMIC ÎN FAZORI SPAȚIALI REPREZENTATIVI AL SUBSISTEMELOR ELECTRIC ȘI MAGNETIC ALE MAȘINII DE INDUCȚIE TRIFAZATE

Se consideră o mașină de inducție bipolară trifazată, având înfășurarea de fază statorică A cu distribuție sinusoidală pe suprafața cilindrică interioară (de alezaj) a armăturii feromagnetice lamelate (admisă fără creștături) a statorului, reprezentată schematic în planul secțiunii transversale a mașinii, conform Fig.1.

Notând cu  $\mathbf{w}_s, \mathbf{k}_{ws}$  și  $\mathbf{W}_{ef,s} = \mathbf{k}_{ws}\mathbf{w}_s$ , numărul de spire înseriate, factorul de înfășurare și, respectiv, numărul efectiv de spire al înfășurării de fază statorică A, densitatea distribuției sinusoidale a acesteia se poate exprima – în funcție de coordonata unghiulară  $\varphi$  (exprimată în [rad el.]) a sistemului de coordonate polare  $(r, \varphi)$  (atașat planului secțiunii transversale a mașinii) cu axa polară coincidentă cu axa magnetică a înfășurării de fază statorică A (Fig.1) – prin  $\mathbf{w}_{ef,s}(\varphi) = \hat{\mathbf{w}}_{ef,s} \sin \varphi$ , unde  $\hat{\mathbf{w}}_{ef,s}$  desemnează valoarea maximă (sau de vârf) a densității distribuției sinusoidale și se explicitează în funcție de numărul efectiv de spire al înfășurării:

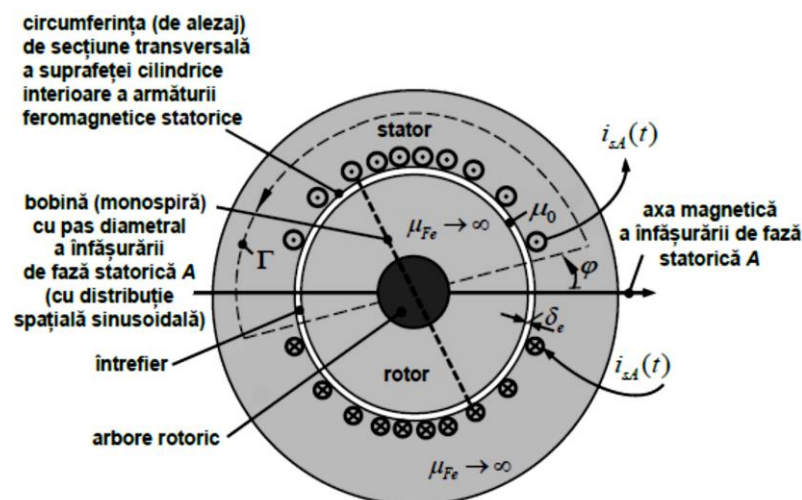


Fig. 1. – Reprezentarea schematică – în planul secțiunii transversale a unei mașini de inducție bipolare trifazate – a distribuției sinusoidale a înfășurării de fază statorică A pe suprafața cilindrică interioară a armăturii feromagnetice lamelate (fără creștături) a statorului.

$$\mathbf{W}_{ef,s} = \mathbf{k}_{ws}\mathbf{w}_s = \int_0^\pi \hat{\mathbf{w}}_{ef,s} \sin \varphi \mathbf{d}\varphi = \hat{\mathbf{w}}_{ef,s}(-\cos \varphi)|_0^\pi = 2\hat{\mathbf{w}}_{ef,s},$$

de unde,

$$\widehat{W}_{ef,s} = \frac{W_{ef,s}}{2} = \frac{k_{ws}w_s}{2}. \quad (1)$$

Dacă înfășurarea de fază statorică  $A$  este parcursă de curentul electric cu valoarea instantanee a intensității  $i_{sA}(t)$ , se obține solenația instantanee,  $\Theta_{sA}(\varphi, t)$ , a înfășurării de fază statorică  $A$  cu distribuție sinusoidală de-a lungul circumferinței (de alezaj) interioare a coroanei circulare statorice (Fig. 1) – reprezentând, în planul secțiunii transversale a mașinii, suprafața cilindrică interioară (dinspre întrefier) a armăturii feromagnetice lamelate (admisă fără creștături) a statorului – ca integrala de linie în lungul curbei închise  $\Gamma$  din Fig. 1, transcrisă corespunzător variabilei unghiulare polare  $\varphi$  :

$$\Theta_{sA}(\varphi, t) = \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \frac{k_{ws}w_s}{2} i_{sA}(t) \sin \varphi' d\varphi' = \frac{k_{ws}w_s}{2} i_{sA}(t) (-\cos \varphi') \Big|_{\varphi}^{\varphi+\pi} = k_{ws}w_s i_{sA}(t) \cos \varphi. \quad (2)$$

Din analiza relației (2), se constată că solenația instantanee  $\Theta_{sA}(\varphi, t)$  a înfășurării de fază statorică  $A$  – având distribuție sinusoidală de-a lungul circumferinței interioare a coroanei circulare feromagnetice statorice din planul secțiunii transversale a mașinii de inducție bipolare trifazate – este o funcție scalară de două variabile decuplate, unghiul polar,  $\varphi$  și timpul,  $t$ , de forma  $\Theta_{sA}(\varphi, t) = f(\varphi)g(t)$  și, deci, reprezintă o undă plană staționară (care nu se propagă, ci oscilează 'pe loc'), fiind modulată de intensitatea instantanee  $i_{sA}(t)$  a curentului electric din înfășurarea de fază statorică  $A$  și având un profil cu puncte fixe în plan, distanțate regulat după unghiul polar  $\varphi$ , de solenație maximă (în modul) instantanee (puncte denumite ventre), pentru  $\cos \varphi = \pm 1$  și, respectiv, de solenație instantanee nulă (puncte denumite noduri), pentru  $\cos \varphi = 0$ ; pentru orice moment de timp, valoarea maximă (în modul) instantanee a solenației  $\Theta_{sA}(\varphi, t)$  este atinsă în ventre situate pe axa magnetică a înfășurării de fază statorică  $A$  ( $\varphi = 0, \pi, 2\pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ).

Aplicând teorema lui Ampère (în forma integrală) în lungul aceleiași curbe închise  $\Gamma$  din Fig. 1, se obține componenta scalară radială  $B_{\delta,r_{sA}}(\varphi, t)$  a inducției magnetice instantanee create de solenația  $\Theta_{sA}(\varphi, t)$  a înfășurării de fază statorică  $A$  în coroana circulară a întrefierului (cu permeabilitatea magnetică  $\mu_0$ ) din planul secțiunii transversale a mașinii:

$$2\delta_e B_{\delta,r_{sA}}(\varphi, t) / \mu_0 = \Theta_{sA}(\varphi, t) = k_{ws}w_s i_{sA}(t) \cos \varphi,$$

de unde,

$$B_{\delta,r_{sA}}(\varphi, t) = (\mu_0 / 2\delta_e) \Theta_{sA}(\varphi, t) = (\mu_0 / 2\delta_e) k_{ws}w_s i_{sA}(t) \cos \varphi. \quad (3)$$

În deducerea relației (3), s-a considerat tensiunea magnetică nulă în coroana circulară feromagnetică statorică din planul secțiunii transversale a mașinii, permeabilitatea magnetică (absolută) a armăturii feromagnetice statorice fiind admisă de valoare foarte mare,  $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ .

Conform relației (3), componenta scalară radială  $B_{\delta,r_{sA}}(\varphi, t)$  a inducției magnetice instantanee în regiunea de întrefier a planului secțiunii transversale a mașinii reprezintă, de asemenea, o undă plană staționară, având expresie similară (adică, aceleași ventre și noduri) cu cea a solenației instantanee  $\Theta_{sA}(\varphi, t)$  a înfășurării de fază statorică  $A$ , de care diferă doar prin constanta multiplicativă  $\mu_0 / 2\delta_e$ .

Relații analoge cu (2) și (3), se obțin referitor la înfășurarea de fază statorică  $B$  și, respectiv, la înfășurarea de fază statorică  $C$ , dacă se ține seama că aceste înfășurări de fază au același număr efectiv de spire,  $k_{ws}w_s$ , aceiași parametri de circuit electric, distribuție sinusoidală de-a lungul circumferinței interioare a coroanei circulare feromagnetice statorice din planul

secțiunii transversale a mașinii și axele magnetice decalate în sens trigonometric direct (antiorar) cu  $2\pi/3$  [rad el.], respectiv, cu  $4\pi/3$  [rad el.], față de axa magnetică a înfășurării de fază statorică A:

$$\Theta_{sB}(\varphi, t) = k_{ws} w_s i_{sB}(t) \cos(\varphi - 2\pi/3), \quad (4)$$

$$\Theta_{sC}(\varphi, t) = k_{ws} w_s i_{sC}(t) \cos(\varphi - 4\pi/3) \quad (5)$$

și, respectiv,

$$B_{\delta,r_{sB}}(\varphi, t) = (\mu_0/2\delta_e)\Theta_{sB}(\varphi, t) = (\mu_0/2\delta_e)k_{ws} w_s i_{sB}(t) \cos(\varphi - 2\pi/3), \quad (6)$$

$$B_{\delta,r_{sC}}(\varphi, t) = (\mu_0/2\delta_e)\Theta_{sC}(\varphi, t) = (\mu_0/2\delta_e)k_{ws} w_s i_{sC}(t) \cos(\varphi - 4\pi/3). \quad (7)$$

Solenajia rezultantă instantanee a înfășurării trifazate statorice a mașinii de inducție bipolare trifazate se obține prin însumarea celor trei solenajii instantanee ale înfășurărilor de fază statorice A, B și, respectiv, C – admise cu distribuție sinusoidală de-a lungul circumferinței interioare a coroanei circulare feromagnetice statorice din planul secțiunii transversale a mașinii – exprimate prin relațiile (2), (4) și (5):

$$\begin{aligned} \Theta_s(\varphi, t) &= k_{ws} w_s [i_{sA}(t) \cos \varphi + i_{sB}(t) \cos(\varphi - 2\pi/3) + i_{sC}(t) \cos(\varphi - 4\pi/3)] \\ &= (3/2)k_{ws} w_s \left[ i_{sA}(t) \cos \varphi + \left( [i_{sB}(t) - i_{sC}(t)] / \sqrt{3} \right) \sin \varphi \right], \end{aligned} \quad (8)$$

unde s-a ținut seama de ipoteza conexiunii în stea a înfășurării trifazate statorice, cu punctul neutru al stelei izolat – astfel că suma algebrică a valorilor instantanee ale intensităților celor trei curenți electrici statorici de fază este zero, și de identitățile trigonometrice,

$$\cos(\varphi - 2\pi/3) = -(1/2)\cos \varphi + (\sqrt{3}/2)\sin \varphi, \quad \cos(\varphi - 4\pi/3) = -(1/2)\cos \varphi - (\sqrt{3}/2)\sin \varphi.$$

Expresia (8) a distribuției spațio-temporale a solenajiei rezultante instantanee a înfășurării trifazate statorice a mașinii se poate transcrie în forma echivalentă:

$$\Theta_s(\varphi, t) = (3/2)k_{ws} w_s f_{\Theta_s}(t) \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)] = \hat{\Theta}_s(t) \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)], \quad (9)$$

reprezentând o *undă plană progresivă (învârtitoare) în raport cu unghiul polar  $\varphi$* , care (i) se caracterizează prin amplitudinea instantanee  $\hat{\Theta}_s(t) = (3/2)k_{ws} w_s f_{\Theta_s}(t)$  și prin poziția unghiulară polară instantanee  $\varphi = \alpha_{\Theta_s}(t)$  a acesteia și (ii) se propagă (se rotește) în sensul crescător al unghiului polar  $\varphi > 0$  (sensul trigonometric direct) de-a lungul circumferinței dinspre întrefier a coroanei circulare feromagnetice statorice din planul secțiunii transversale a mașinii.

Procedând în mod similar pentru determinarea componentei scalare radiale  $B_{\delta,r_{s}}(\varphi, t)$  a inducției magnetice instantanee – create de solenajia rezultantă instantanee  $\Theta_s(\varphi, t)$  a înfășurării trifazate statorice în coroana circulară a întrefierului din planul secțiunii transversale a mașinii – se obține:

$$B_{\delta,r_{s}}(\varphi, t) = (\mu_0/2\delta_e)\hat{\Theta}_s(t) \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)] = \hat{B}_{\delta,r_{s}}(t) \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)], \quad (10)$$

reprezentând, de asemenea, o *undă plană progresivă (învârtitoare)*, de amplitudine (valoare maximă pozitivă) instantanee  $\hat{B}_{\delta,r_{s}}(t) = (\mu_0/2\delta_e)\hat{\Theta}_s(t)$  și unghi polar instantaneu corespunzător acesteia,  $\varphi = \alpha_{\Theta_s}(t)$ , și cu sensul trigonometric direct de propagare în lungul coroanei circulare (de grosime redusă) a întrefierului din planul secțiunii transversale a mașinii.

Dacă în expresia solenajiei rezultante instantanee a înfășurării trifazate statorice  $\Theta_s(\varphi, t)$ , din relația (8), respectiv, din relația (9), se aplică substituția complexă pe baza formulei lui

Euler,  $e^{-j\gamma} = \cos \gamma - j \sin \gamma$ , și anume  $\cos \gamma = \Re \{ e^{-j\gamma} \}$ , se obțin următoarele expresii echivalente pentru valoarea instantanee a mărimii scalare reale  $\Theta_s(\varphi, t)$ :

$$\begin{aligned}\Theta_s(\varphi, t) &= k_{ws} w_s [i_{sA}(t) \cos \varphi + i_{sB}(t) \cos(\varphi - 2\pi/3) + i_{sC}(t) \cos(\varphi - 4\pi/3)] \\ &= k_{ws} w_s \left[ \Re \{ i_{sA}(t) e^{-j\varphi} \} + \Re \{ i_{sB}(t) e^{j2\pi/3} \cdot e^{-j\varphi} \} + \Re \{ i_{sC}(t) e^{j4\pi/3} \cdot e^{-j\varphi} \} \right] \\ &= (3/2) k_{ws} w_s \left[ \Re \left\{ (2/3) \left( i_{sA}(t) + \underline{a} i_{sB}(t) + \underline{a}^2 i_{sC}(t) \right) \cdot e^{-j\varphi} \right\} \right],\end{aligned}\quad (11)$$

și, respectiv,

$$\Theta_s(\varphi, t) = \hat{\Theta}_s(t) \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)] = \Re \left\{ \hat{\Theta}_s(t) e^{j\alpha_{\Theta_s}(t)} \cdot e^{-j\varphi} \right\}, \quad (12)$$

unde s-au definit operatorii de rotație cu  $2\pi/3$ ,  $\underline{a} = e^{j2\pi/3} = -1/2 + j\sqrt{3}/2$ , și, respectiv, cu  $4\pi/3$ ,  $\underline{a}^2 = e^{j4\pi/3} = -1/2 - j\sqrt{3}/2$ , în planul complex, și s-a ținut seama de proprietatea operatorului 'parte reală a numărului complex':  $\Re \{ \underline{z} \} + \Re \{ \underline{w} \} = \Re \{ \underline{z} + \underline{w} \}$ .

Din analiza expresiilor echivalente (11) și (12) ale undei plane progresive (învârtitoare) a solenației rezultante instantanee a înfășurării trifazate statorice a mașinii de inducție bipolare trifazate, se constată egalitatea în complex:

$$(2/3) \left( i_{sA}(t) + \underline{a} i_{sB}(t) + \underline{a}^2 i_{sC}(t) \right) = (2/3) k_{ws} w_s \hat{\Theta}_s(t) e^{j\alpha_{\Theta_s}(t)} \quad (13)$$

Ambii membri ai egalității (13) reprezintă valorile instantanee ale unor mărimi scalare complexe de variabilă reală (timpul  $t$ ), de forma  $\underline{z}(t) = x(t) + j y(t) = |\underline{z}(t)| e^{j \arg(\underline{z}(t))}$ , unde  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $|\underline{z}(t)|$  și  $\arg(\underline{z}(t))$  sunt valorile instantanee ale unor mărimi scalare reale (de timp). Notând cu

$$\underline{i}_s(t) = (2/3) \left( i_{sA}(t) + \underline{a} i_{sB}(t) + \underline{a}^2 i_{sC}(t) \right) = |\underline{i}_s(t)| e^{j \arg(\underline{i}_s(t))} \quad (14)$$

valoarea instantanee a mărimii scalare complexe din membrul stâng al egalității (13) și înmulțind ambii membri ai egalității (13) cu mărimea scalară complexă (de timp), de modul

$$|\underline{i}_s(t)| e^{j \arg(\underline{i}_s(t))} e^{-j \alpha_{\Theta_s}(t)} = (2/3) k_{ws} w_s \hat{\Theta}_s(t). \quad (15)$$

Prin introducerea relației (15) în expresia (9) a solenației rezultante instantanee  $\Theta_s(\varphi, t)$  a înfășurării trifazate statorice a mașinii, se obține:

$$\Theta_s(\varphi, t) = (3/2) k_{ws} w_s |\underline{i}_s(t)| e^{j[\arg(\underline{i}_s(t)) - \alpha_{\Theta_s}(t)]} \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)]. \quad (16)$$

Condiția ca expresia (16) să reprezinte o funcție reală de coordonata polară  $\varphi$  (a planului secțiunii transversale a mașinii) și de timp, impune ca mărimea  $e^{j[\arg(\underline{i}_s(t)) - \alpha_{\Theta_s}(t)]}$  să fie reală, adică  $\arg(\underline{i}_s(t)) = \alpha_{\Theta_s}(t)$ ; așadar,

$$\Theta_s(\varphi, t) = \hat{\Theta}_s(t) \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)] = (3/2) k_{ws} w_s |\underline{i}_s(t)| \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)], \quad (17)$$

iar relația de definiție (14) a valorii instantanee a mărimii scalare complexe  $\underline{i}_s(t)$  se rescrie

$$\underline{i}_s(t) = (2/3) \left( i_{sA}(t) + \underline{a} i_{sB}(t) + \underline{a}^2 i_{sC}(t) \right) = |\underline{i}_s(t)| e^{j \alpha_{\Theta_s}(t)}. \quad (18)$$

Semnificația fizică a valorii instantanee a mărimii scalare complexe  $\underline{i}_s(t)$ , având expresia (18), va fi relevată, în continuare, prin reprezentarea sa geometrică în planul complex.

Se consideră, astfel, planul complex confundat cu (suprapus peste) planul secțiunii transversale a mașinii de inducție bipolare trifazate, și având originea sa  $O$  coincidentă cu punctul (centrul de simetrie) în care axa de rotație a rotorului și arborelui mașinii intersectează (înțepă) ortogonal planul secțiunii transversale a mașinii (Fig. 2). Se atașează acestui plan complex:

– un sistem de coordonate biaxial ortonormat cu versorii – segmente (de dreaptă) orientate (reprezentate sub formă de săgeți), având lungimile egale cu unitatea – complecși,  $1 = e^{j0}$ , al axei reale (care este coincidentă cu axa magnetică a înfășurării de fază statorică A) și, respectiv,  $j = e^{j\pi/2}$ , al axei imaginare; fiecare dintre cei doi versori complecși ortogonali are originea în punctul  $O$  și extremitatea (vârful) pe cercul unitate  $\mathcal{C}((0,0),1)$ , de ecuație  $|\underline{z}| = 1$ , al planului complex (Fig. 2).

– un sistem de coordonate triaxial oblic, având versorii complecși,  $1 = e^{j0}$ ,  $\underline{a} = e^{j2\pi/3}$  și  $\underline{a}^2 = e^{j4\pi/3}$ , ai axelor magnetice ale înfășurărilor de fază statorice A, B și, respectiv, C; cei trei versori complecși definesc matematic rădăcinile cubice ale unității, au aceeași origine în punctul  $O$ , iar extremitățile lor sunt vârfurile unui triunghi echilateral înscris în cercul unitate  $\mathcal{C}((0,0),1)$ , de ecuație  $|\underline{z}| = 1$ , al planului complex (Fig. 2).

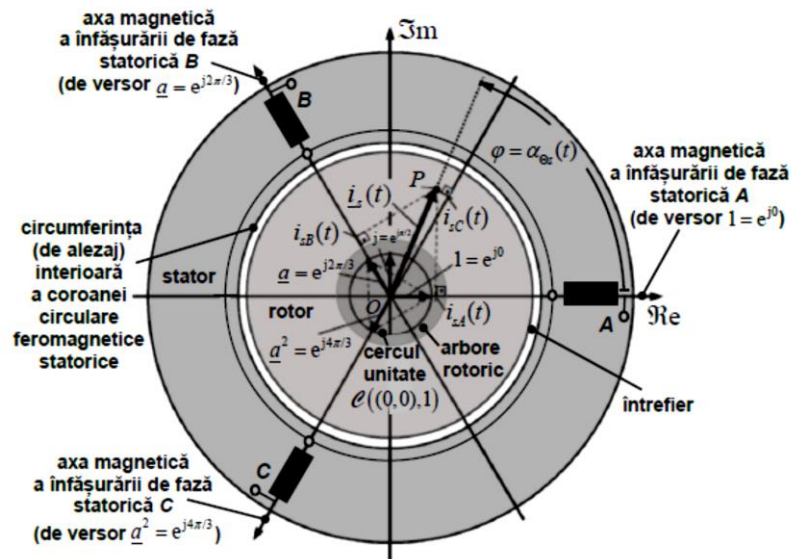


Fig. 2. – Definiția – în planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii de inducție bipolare trifazate – a fazorului spațial reprezentativ  $\underline{i}_s(t) = |\underline{i}_s(t)| e^{j\alpha_{os}(t)}$  al intensităților instantanee ale curenților electrici din înfășurările de fază statorice A, B și C (reprezentate simbolic prin bobine concentrate în jurul axelor magnetice ale înfășurărilor de fază respective).

Corespunzător relațiilor (17) și (18), valoarea instantanee a mărimii scalare complexe (de timp)  $\underline{i}_s(t) = |\underline{i}_s(t)| e^{j\alpha_{os}(t)}$  se reprezintă geometric, în planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii, prin segmentul (de dreaptă) orientat  $\overline{OP}$ , cu lungimea egală cu  $(2/3k_{ws}w_s)$  din amplitudinea instantanee  $\hat{\Theta}_s(t)$  a unei plane progresive (învârtitoare) a solenației rezultante a înfășurării trifazate statorice din planul secțiunii transversale a mașinii,

și cu orientarea determinată de poziția unghiulară polară instantanee  $\varphi = \alpha_{\Theta_s}(t)$  a aceleiași amplitudini instantanee  $\hat{\Theta}_s(t)$  (Fig.2).

Datorită semnificației fizice a metricii sale (lungime și orientare) – congruente cu valoarea instantanee și poziția unghiulară polară instantanee ale amplitudinii (valorii maxime pozitive) unei plane progresive (învârtitoare) a solenației rezultante a înfășurării trifazate satorice din planul secțiunii transversale a mașinii de inducție bipolare trifazate – segmentul (de dreaptă) orientat (vectorul legat), de afix,  $\underline{i}_s(t) = |\underline{i}_s(t)|e^{j\alpha_{\Theta_s}(t)}$ , din planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii este denumit *fazor spațial*, prin traducerea din limbile germană și engleză a expresiilor corespondente ('*Raumzeiger*', respectiv, '*space phasor*') introduse și justificate conceptual în lucrările de referință [1], [2].

Această definiție (cu sensul fizic relevat) fiind incompletă, se întregește prin noțiunea matematică sinoptică de '*fazor (de timp) reprezentativ*', legitimată prin faptul că valoarea instantanee a mărimii scalare complexe  $\underline{i}_s(t) = (2/3)(\underline{i}_{sA}(t) + \underline{a}\underline{i}_{sB}(t) + \underline{a}^2\underline{i}_{sC}(t))$  și segmentul (de dreaptă) orientat imagine a sa din planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii concentrează informații privind valorile instantanee  $i_{sA}(t)$ ,  $i_{sB}(t)$  și  $i_{sC}(t)$  ale intensităților curenților electrice din cele trei înfășurări de fază satorice A, B și, respectiv, C.

Într-adevăr, proiecțiile ortogonale ale segmentului (de dreaptă) orientat, de afix  $\underline{i}_s(t) = (2/3)(\underline{i}_{sA}(t) + \underline{a}\underline{i}_{sB}(t) + \underline{a}^2\underline{i}_{sC}(t)) = |\underline{i}_s(t)|e^{j\alpha_{\Theta_s}(t)}$  – din planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii – pe axele magnetice, de versori complecși  $1 = e^{j0}$ ,  $\underline{a} = e^{j2\pi/3}$  și  $\underline{a}^2 = e^{j4\pi/3}$ , ai axelor magnetice ale înfășurărilor de fază satorice A, B și, respectiv, C reprezintă valorile instantanee ale intensităților curenților electrice din aceste înfășurări (Fig.2):

$$\text{pr}_{1=e^{j0}}\underline{i}_s(t) = \Re\{\underline{i}_s(t) \cdot 1\} = \frac{2}{3} \left[ i_{sA}(t) + i_{sB}(t)\Re\{\underline{a}\} + i_{sC}(t)\Re\{\underline{a}^2\} \right] = \frac{2}{3} \left[ i_{sA}(t) - \frac{1}{2}i_{sB}(t) - \frac{1}{2}i_{sC}(t) \right] = i_{sA}(t),$$

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\underline{a}}\underline{i}_s(t) &= \Re\{\underline{i}_s(t) \cdot \underline{a}^*\} = \frac{2}{3} \left[ i_{sA}(t)\Re\{\underline{a}^*\} + i_{sB}(t)\Re\{\underline{a} \cdot \underline{a}^*\} + i_{sC}(t)\Re\{\underline{a}^2 \cdot \underline{a}^*\} \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[ -\frac{1}{2}i_{sA}(t) + i_{sB}(t) - \frac{1}{2}i_{sC}(t) \right] = i_{sB}(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pr}_{\underline{a}^2}\underline{i}_s(t) &= \Re\{\underline{i}_s(t) \cdot \underline{a}^{2*}\} = \frac{2}{3} \left[ i_{sA}(t)\Re\{\underline{a}^{2*}\} + i_{sB}(t)\Re\{\underline{a} \cdot \underline{a}^{2*}\} + i_{sC}(t)\Re\{\underline{a}^2 \cdot \underline{a}^{2*}\} \right] \\ &= \frac{2}{3} \left[ -\frac{1}{2}i_{sA}(t) - \frac{1}{2}i_{sB}(t) + i_{sC}(t) \right] = i_{sC}(t), \end{aligned}$$

unde s-a ținut seama de relațiile:

$$\begin{aligned} i_{sA}(t) + i_{sB}(t) + i_{sC}(t) &= 0, \quad \underline{a} = -1/2 + j\sqrt{3}/2, \quad \underline{a}^2 = -1/2 - j\sqrt{3}/2 = \neq \underline{a}, \quad \underline{a}^* \underline{a} = \underline{a}^2 \cdot \underline{a}^{2*} = 1, \\ \underline{a}^2 \cdot \underline{a}^* &= \underline{a}^* \cdot \underline{a}^2 = \underline{a}(\underline{a} \cdot \underline{a}^*) = (\underline{a}^* \cdot \underline{a})\underline{a} = \underline{a} \end{aligned}$$

și s-a notat cu simbolul-asterisc operatorul de conjugare complexă.

În virtutea considerentelor fizico-matematice anterioare, (i) valoarea instantanee a mărimii scalare complexe (de timp),

$$\underline{i}_s(t) = (2/3)(\underline{i}_{sA}(t) + \underline{a}\underline{i}_{sB}(t) + \underline{a}^2\underline{i}_{sC}(t)) = |\underline{i}_s(t)|e^{j\alpha_{\Theta_s}(t)}$$



– al cărei modul  $|\underline{i}_s(t)| = (2/3k_{ws}w_s)\hat{\Theta}_s(t)$  este proporțional cu amplitudinea (valoarea maximă pozitivă) instantanee  $\hat{\Theta}_s(t)$  a unei plane progresive (învârtitoare) a solenației rezultante a înfășurării trifazate simetrice statorice din planul secțiunii transversale a mașinii de inducție trifazate și al cărei argument  $\arg(\underline{i}_s(t)) = \alpha_{\Theta_s}(t)$  este identic cu unghiul polar instantaneu al aceleiași amplitudini instantanee  $\hat{\Theta}_s(t)$  a unei plane progresive (învârtitoare) a solenației rezultante a înfășurării trifazate statorice (din planul secțiunii transversale a mașinii) – și

(ii) reprezentarea sa geometrică prin segmentul (de dreaptă) orientat din planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii – a cărui metrică (lungime și orientare) desemnează modulul și argumentul afixului  $\underline{i}_s(t) = |\underline{i}_s(t)|e^{j\alpha_{\Theta_s}(t)}$  și ale cărui proiecții ortogonale pe axele magnetice ale înfășurărilor de fază statorice  $A$ ,  $B$  și  $C$  constituie valorile instantanee ale intensităților curenților electrici din aceste înfășurări – se unifică în definiția completă a conceptului de *fazor spațial reprezentativ al intensităților instantanee ale curenților electrici din înfășurările de fază statorice  $A$ ,  $B$  și, respectiv,  $C$  ale mașinii de inducție trifazate.*

Introducând notația complexă,  $\cos \zeta = (e^{j\zeta} + e^{-j\zeta})/2$ , în expresia (17) a solenației rezultante instantanee  $\Theta_s(\varphi, t)$  a înfășurării trifazate statorice a mașinii, se obține:

$$\begin{aligned}\Theta_s(\varphi, t) &= \hat{\Theta}_s(t) \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)] = (3/2)k_{ws}w_s |\underline{i}_s(t)| \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)] \\ &= (3/4)k_{ws}w_s |\underline{i}_s(t)| (e^{j[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)]} + e^{-j[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)]}) \\ &= (3/4)k_{ws}w_s \left( |\underline{i}_s(t)| e^{-j\alpha_{\Theta_s}(t)} \cdot e^{j\varphi} + |\underline{i}_s(t)| e^{j\alpha_{\Theta_s}(t)} \cdot e^{-j\varphi} \right) \\ &= (3/4)k_{ws}w_s \left( \underline{i}_s(t) e^{*j\varphi} + \underline{i}_s^*(t) e^{j\varphi} \right),\end{aligned}\quad (19)$$

unde  $\underline{i}_s^*(t) = |\underline{i}_s(t)| e^{-j\alpha_{\Theta_s}(t)} = (2/3) \left( \underline{i}_{sA}(t) + \underline{a}^2 \underline{i}_{sB}(t) + \underline{a} \underline{i}_{sC}(t) \right)$  desemnează *fazorul spațial reprezentativ complex conjugat al valorilor instantanee ale intensităților curenților electrici din înfășurările de fază statorice  $A$ ,  $B$  și, respectiv,  $C$  ale mașinii de inducție trifazate.*

Ținând seama de relația (19), expresia (10) a componentei scalare radiale  $B_{\delta, r_s}(\varphi, t)$  a inducției magnetice instantanee – create de solenația rezultantă instantanee  $\Theta_s(\varphi, t)$  a înfășurării trifazate statorice în coroana circulară a întrefierului din planul secțiunii transversale a mașinii, se poate transcrie în forma:

$$\begin{aligned}B_{\delta, r_s}(\varphi, t) &= \hat{B}_{\delta, r_s}(t) \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)] = (\mu_0 / 2\delta_e) \hat{\Theta}_s(t) \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)] \\ &= (3\mu_0 / 4\delta_e) k_{ws}w_s |\underline{i}_s(t)| \cos[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)] = (3\mu_0 / 8\delta_e) k_{ws}w_s |\underline{i}_s(t)| (e^{j[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)]} + e^{-j[\varphi - \alpha_{\Theta_s}(t)]}) \\ &= (3\mu_0 / 8\delta_e) k_{ws}w_s \left( |\underline{i}_s(t)| e^{-j\alpha_{\Theta_s}(t)} \cdot e^{j\varphi} + |\underline{i}_s(t)| e^{j\alpha_{\Theta_s}(t)} \cdot e^{-j\varphi} \right) \\ &= (3\mu_0 / 8\delta_e) k_{ws}w_s \left( \underline{i}_s(t) e^{-j\varphi} + \underline{i}_s^*(t) e^{j\varphi} \right).\end{aligned}\quad (20)$$

Relațiile (19) și (20) arată că valorile instantanee ale mărimilor scalare reale, reprezentând solenația rezultantă  $\Theta_s(\varphi, t)$  a înfășurării trifazate statorice a mașinii și, respectiv, componenta (scalară) radială  $B_{\delta, r_s}^*(\varphi, t)$  a inducției magnetice create de această solenație în coroana circulară a întrefierului din planul secțiunii transversale a mașinii, sunt proporționale cu mărimea reală definită de suma fazorilor spațiali reprezentativi complex conjugați  $\underline{i}_s(t) e^{-j\varphi} + \underline{i}_s^*(t) e^{j\varphi}$ .

În baza unor considerente fizico-matematice similare celor anterioare și a ipotezelor adoptate pentru modelele dinamice ale subsistemelor electric și magnetic ale mașinii de inducție



trifazate, solenația rezultantă instantanee a înfășurării trifazate echivalente rotorice, conectată în stea, închisă în scurtcircuit și raportată la înfășurarea trifazată statorică, se exprimă prin:

$$\begin{aligned}
\Theta'_r(\varphi, \theta(t), t) &= k_{wre} w_{re} [i'_{ra}(t) \cos(\varphi - \theta(t)) + i'_{rb}(t) \cos(\varphi - \theta(t) - 2\pi/3) \\
&\quad + i'_{rc}(t) \cos(\varphi - \theta(t) - 4\pi/3)] = \hat{\Theta}'_r(t) \cos[\varphi - \theta(t) - \alpha_{\Theta'_r}(t)] \\
&= (3/2) k_{wre} w_{re} |\underline{i}'_r(t)| \cos[\varphi - \theta(t) - \alpha_{\Theta'_r}(t)] \\
&= (3/4) k_{wre} w_{re} (|\underline{i}'_r(t)| e^{-j\alpha_{\Theta'_r}(t)} \cdot e^{j[\varphi - \theta(t)]} + |\underline{i}'_r(t)| e^{j\alpha_{\Theta'_r}(t)} \cdot e^{-j[\varphi - \theta(t)]}) \\
&= (3/4) k_{wre} w_{re} (\underline{i}'_r(t) e^{-j[\varphi - \theta(t)]} + \underline{i}'_r(t) e^{j[\varphi - \theta(t)]}),
\end{aligned} \tag{21}$$

unde  $k_{wre}$  și  $w_{re}$  desemnează factorul de înfășurare și, respectiv, numărul de spire înseriate ale înfășurării (echivalente) de fază rotorică, valori obținute prin echivalarea înfășurării rotorice polifazate (tip colivie simplă) în scurtcircuit a mașinii cu o înfășurare trifazată, conectată în stea și închisă în scurtcircuit – având înfășurările echivalente de fază  $a$ ,  $b$  și  $c$ , cu aceiași parametri de circuit electric, cu distribuție simetrică, sinusoidală pe suprafața cilindrică dinspre întrefier a armăturii feromagnetice lamelate (admisă fără crestături) a rotorului și cu axe magnetice decalate mutual în sensul (trigonometric direct) de succesiune a fazelor cu  $2\pi/3$  [rad el.] (Fig. 3) – și raportată la înfășurarea trifazată statorică;  $\theta(t)$  și  $\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$  reprezintă poziția unghiulară electrică instantanee a rotorului (exprimată în [rad el.]) – definită prin unghiul polar instantaneu dintre axa magnetică (instantanee) a înfășurării echivalente de fază rotorică  $a$  și axa magnetică a înfășurării de fază statorică  $A$ , considerată axă (reală) de referință – și, respectiv, viteza unghiulară electrică instantanee de rotație a rotorului (exprimată în [rad el./s]);  $\alpha_{\Theta'_r}(t)$  este poziția unghiulară polară instantanee – definită în raport cu axa magnetică instantanee (rotitoare cu viteza unghiulară electrică instantanee de rotație  $\omega(t)$ ) a înfășurării echivalente de fază rotorică  $a$  – corespunzătoare amplitudinii  $\hat{\Theta}'_r(t)$  a solenației rezultante instantanee  $\Theta'_r(\varphi, \theta(t), t)$  a înfășurării trifazate echivalente rotorice raportate la înfășurarea trifazată statorică a mașinii;

$$\underline{i}'_r(t) = (2/3) (i'_{ra}(t) + \underline{a}i'_{rb}(t) + \underline{a}^2i'_{rc}(t)) = |\underline{i}'_r(t)| e^{j\alpha_{\Theta'_r}(t)}, \tag{22}$$

$$\underline{i}'_r^*(t) = (2/3) (i'_{ra}(t) + \underline{a}^2i'_{rb}(t) + \underline{a}i'_{rc}(t)) = |\underline{i}'_r(t)| e^{-j\alpha_{\Theta'_r}(t)}, \tag{23}$$

semnifică *fazorii spațiali reprezentativi complex conjugați ai intensităților instantanee*  $i'_{ra}(t)$ ,  $i'_{rb}(t)$  și  $i'_{rc}(t)$  (cu sumă nulă,  $i'_{ra}(t) + i'_{rb}(t) + i'_{rc}(t) = 0$ ) *ale curenților electrici din înfășurările echivalente de fază rotorice*  $a$ ,  $b$  și, respectiv,  $c$ , *raportate la înfășurarea trifazată statorică a mașinii de inducție trifazate* – al căror modul  $|\underline{i}'_r(t)|$  este proporțional cu amplitudinea instantanee  $\hat{\Theta}'_r(t)$  a unei plane progresive (învârtitoare) a solenației rezultante a înfășurării trifazate simetrice echivalente rotorice (din planul secțiunii transversale a mașinii) raportate la înfășurarea trifazată statorică și al căror argument  $\arg(\underline{i}'_r(t)) = \alpha_{\Theta'_r}(t)$  este identic cu unghiul polar instantaneu al aceleiași amplitudini instantanee  $\hat{\Theta}'_r(t)$ .

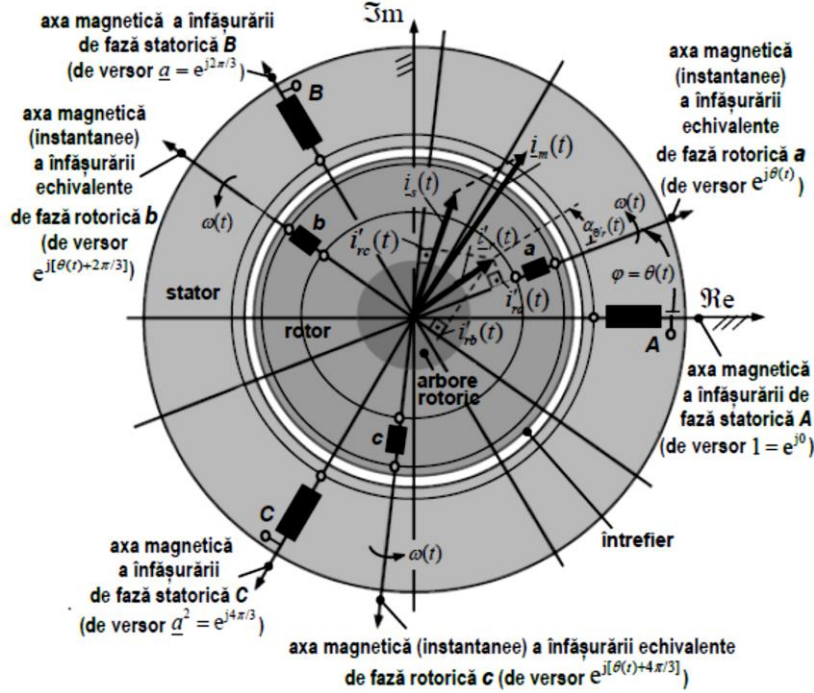


Fig. 3. – Definiția – în planul complex confundat cu planul secțiunii transversal a mașinii de inducție bipolare trifazate – a fazorului spațial reprezentativ  $i'_r(t)$  al intensităților instantanee ale curenților electrici din înfășurările echivalente de fază rotorice  $a$ ,  $b$  și  $c$  (raportate la înfășurările de fază statorice și reprezentate simbolic prin bobine concentrate în jurul axelor magnetice (instantanee) ale înfășurărilor echivalente de fază respective) și a fazorului spațial reprezentativ  $i_m(t) = i_s(t) + i'_r(t)e^{j\theta(t)}$ .

Dezvoltarea modelului dinamic în fazori spațiali reprezentativi al mașinii de inducție trifazate comportă determinarea fluxurilor magnetice totale instantanee ale înfășurărilor de fază statorice și echivalente rotorice în scurtcircuit, în funcție de fazorii spațiali reprezentativi ai intensităților instantanee ale curenților electrici din aceste înfășurări.

Astfel, fluxurile magnetice totale instantanee ale înfășurărilor de fază statorice A, B și, respectiv, C au expresiile:

$$\begin{aligned}
 \psi_{sA}(t) &= L_{\sigma s} i_{sA}(t) + L_h i_{sA}(t) + \left( L_h \cos \frac{2\pi}{3} \right) i_{sB}(t) + \left( L_h \cos \frac{4\pi}{3} \right) i_{sC}(t) \\
 &+ [L_h \cos \theta(t)] i'_{ra}(t) + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \right] i'_{rb}(t) + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{4\pi}{3} \right) \right] i'_{rc}(t) \\
 &= L_{\sigma s} i_{sA}(t) + L_h i_{sA}(t) - \left( \frac{L_h}{2} \right) (i_{sB}(t) + i_{sC}(t)) + [L_h \cos \theta(t)] i'_{ra}(t) \\
 &\quad + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \right] i'_{rb}(t) + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{4\pi}{3} \right) \right] i'_{rc}(t) \\
 &= L_{\sigma s} i_{sA}(t) + \left( \frac{3}{2} \right) L_h i_{sA}(t) + [L_h \cos \theta(t)] i'_{ra}(t) + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \right] i'_{rb}(t) \\
 &\quad + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{4\pi}{3} \right) \right] i'_{rc}(t),
 \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_{sB}(t) &= L_{\sigma s} i_{sB}(t) + L_h i_{sB}(t) + \left( L_h \cos \frac{4\pi}{3} \right) i_{sA}(t) + \left( L_h \cos \frac{2\pi}{3} \right) i_{sC}(t) \\
 &+ \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{4\pi}{3} \right) \right] i'_{ra}(t) + [L_h \cos \theta(t)] i'_{rb}(t) + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \right] i'_{rc}(t) \\
 &= L_{\sigma s} i_{sB}(t) + \left( \frac{3}{2} \right) L_h i_{sB}(t) + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{4\pi}{3} \right) \right] i'_{ra}(t) + [L_h \cos \theta(t)] i'_{rb}(t) \\
 &\quad + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \right] i'_{rc}(t),
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{sC}(t) &= L_{\sigma s} i_{sC}(t) + L_h i_{sC}(t) + \left( L_h \cos \frac{2\pi}{3} \right) i_{sA}(t) + \left( L_h \cos \frac{4\pi}{3} \right) i_{sB}(t) \\
&+ \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \right] i'_{ra}(t) + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{4\pi}{3} \right) \right] i'_{rb}(t) + [L_h \cos \theta(t)] i'_{rc}(t) \quad (26) \\
&= L_{\sigma s} i_{sC}(t) + \left( \frac{3}{2} \right) L_h i_{sC}(t) + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \right] i'_{ra}(t) + \left[ L_h \cos \left( \theta(t) + \frac{4\pi}{3} \right) \right] i'_{rb}(t) \\
&+ [L_h \cos \theta(t)] i'_{rc}(t)
\end{aligned}$$

unde  $L_{\sigma s}$  desemnează inductanța totală de dispersie a înfășurării de fază statorică a mașinii,  $L_h$  reprezintă inductanța de magnetizare (sau principală) a înfășurării de fază statorică și a înfășurării echivalente de fază rotorică raportată la înfășurarea statorică, și, totodată, amplitudinea inductanței mutuale – variabilă cosinusoidal cu poziția unghiulară electrică instantanee rotorice  $\varphi(t)$  – dintre o înfășurare de fază statorică și o înfășurare de fază rotorică echivalentă, raportată la înfășurarea statorică, în ipoteza egalității numerelor efective de spire ale celor două înfășurări de fază,  $k_{wre} w_{re} = k_{ws} w_s$  (aceste inductanțe fiind asociate cu fluxul magnetic principal rezultat din întrefierul mașinii, înlănțuit atât de circuitul electric al înfășurării statorice de fază, cât și de cel al înfășurării echivalente de fază rotorică) și unde s-a ținut seama că  $i_{sA}(t) + i_{sB}(t) + i_{sC}(t) = \mathbf{0}$  și  $\cos 2\pi/3 = \cos 4\pi/3 = -1/2$ .

Înmulțind relațiile anterioare (24)–(26), respectiv, cu  $2/3$ ,  $(2/3)\underline{a} = (2/3)e^{j2\pi/3}$  și  $(2/3)\underline{a}^2 = (2/3)e^{j4\pi/3}$ , și însumând membru cu membru relațiile astfel obținute, rezultă:

$$\begin{aligned}
\underline{\psi}_s(t) &= \left( \frac{2}{3} \right) \left( \psi_{sA}(t) + \underline{a}\psi_{sB}(t) + \underline{a}^2\psi_{sC}(t) \right) \quad (27) \\
&= L_{\sigma s}(2/3)(i_{sA}(t) + \underline{a}i_{sB}(t) + \underline{a}^2i_{sC}(t)) + L_m(2/3)(i_{sA}(t) + \underline{a}i_{sB}(t) + \underline{a}^2i_{sC}(t)) \\
&+ L_h \left( \frac{2}{3} \right) \left( i'_{ra}(t) + \underline{a}i'_{rb}(t) + \underline{a}^2i'_{rc}(t) \right) \left[ \cos \theta(t) + \underline{a} \cos \left( \theta(t) + \frac{4\pi}{3} \right) + \underline{a}^2 \cos \left( \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\
&= L_{\sigma s} \underline{i}_s(t) + L_m \left[ \underline{i}_s(t) + \underline{i}'_r(t) e^{j\theta(t)} \right] = \underline{\psi}_{\sigma s}(t) + \underline{\psi}_m(t),
\end{aligned}$$

unde

$$\cos \theta(t) + \underline{a} \cos \left( \theta(t) + \frac{4\pi}{3} \right) + \underline{a}^2 \cos \left( \theta(t) + \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left[ (e^{j\theta(t)} + e^{-j\theta(t)}) + (2e^{j\theta(t)} - e^{-j\theta(t)}) \right] = \frac{3}{2} e^{j\theta(t)};$$

$L_m = (3/2)L_h$  reprezintă inductanța ciclică de magnetizare (sau principală) a înfășurării de fază statorică și a înfășurării echivalente de fază rotorică, raportată la înfășurarea statorică și, totodată, amplitudinea inductanței ciclice mutuale între o înfășurare statorică de fază și înfășurarea echivalentă trifazată rotorică în scurtcircuit, raportată la înfășurarea statorică, respectiv, între o înfășurare echivalentă rotorică de fază și înfășurarea trifazată statorică – în ipoteza egalității numerelor efective de spire ale înfășurării de fază statorică și înfășurării echivalente de fază rotorică, raportată la înfășurarea statorică;  $\underline{\psi}_m(t) = L_m \left[ \underline{i}_s(t) + \underline{i}'_r(t) e^{j\theta(t)} \right] = L_m \underline{i}_m(t)$  desemnează *fazorul spațial reprezentativ al fluxului magnetic rezultat instantaneu din regiunea de întrefier a planului secțiunii transversale a mașinii*, fiind proporțional cu suma  $\underline{i}_s(t) + \underline{i}'_r(t) e^{j\theta(t)} = \underline{i}_m(t)$  a fazorilor spațiali reprezentativi  $\underline{i}_s(t)$  și  $\underline{i}'_r(t)$  – multiplicat cu valoarea instantanee a mărimii scalare complexe de modul unitar  $e^{j\theta(t)}$ , întrucât trebuie rotit (în sens trigonometric direct) cu unghiul electric rotoric instantaneu  $\theta(t)$  pentru a se putea suprapune efectul său peste cel al lui  $\underline{i}_s(t)$ , în planul complex, confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii și având axa reală de referință coincidentă cu axa

magnetică a înfășurării de fază statorică A – (Fig.2);  $\underline{i}_m(t)$  definește *fazorul spațial reprezentativ al intensității instantanee a curentului electric de magnetizare rezultat*;  $\underline{\psi}_m(t)$  și  $\underline{i}_m(t)$  sunt *fazori spațiali* reprezentativi, întrucât metrica (lungime și orientare) lor este congruentă cu amplitudinea instantanee și unghiul polar (instantaneu) al acesteia, caracteristice unei plane progresive (învârtitoare) a componentei scalare radiale a inducției magnetice rezultante instantanee din regiunea de întrefier a planului secțiunii transversale a mașinii; *fazorii reprezentativi*,  $\underline{\psi}_{\sigma_s}(t) = L_{\sigma_s} \underline{i}_s(t)$ , *al fluxurilor magnetice de dispersie instantanee ale înfășurărilor de fază statorice* și  $\underline{\psi}_s(t) = (2/3)(\psi_{sA}(t) + \underline{a}\psi_{sB}(t) + \underline{a}^2\psi_{sC}(t)) = \underline{\psi}_{\sigma_s}(t) + \underline{\psi}_m(t)$  *al fluxurilor magnetice totale instantanee* (înlănțuite de circuitele electrice) *ale înfășurărilor de fază statorice*, nu definesc fazori spațiali (cu semnificație fizică), deoarece metrica (lungime și orientare) lor nu este congruentă cu valoarea instantanee și unghiul polar instantaneu al amplitudinii vreunei unde plane progresive (învârtitoare) de mărime scalară internă rezultantă din planul secțiunii transversale a mașinii.

În mod analog, se construiește fazorul reprezentativ  $\underline{\Psi}'_r(t)$  al fluxurilor magnetice totale instantanee  $\Psi'_{ra}(t)$ ,  $\Psi'_{rb}(t)$  și  $\Psi'_{rc}(t)$  ale înfășurărilor echivalente de fază rotorice a, b și, respectiv, c, raportate la înfășurările de fază statorice

$$\Psi'_{ra}(t) = L'_{\sigma_r} i'_{ra}(t) + L_h i'_{ra}(t) + (L_h \cos \frac{2\pi}{3}) i'_{rb}(t) + (L_h \cos \frac{4\pi}{3}) i'_{rc}(t) \quad (28)$$

$$+ [L_h \cos \theta(t)] i_{sA}(t) + \left[ L_h \cos(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sB}(t) + \left[ L_h \cos(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sC}(t)$$

$$= L'_{\sigma_r} i'_{ra}(t) + (3/2) L_h i'_{ra}(t) + [L_h \cos \theta(t)] i_{sA}(t) + \left[ L_h \cos(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sB}(t) + \left[ L_h \cos(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sC}(t),$$

$$\Psi'_{rb}(t) = L'_{\sigma_r} i'_{rb}(t) + L_h i'_{rb}(t) + (L_h \cos \frac{4\pi}{3}) i'_{ra}(t) + (L_h \cos \frac{2\pi}{3}) i'_{rc}(t) \quad (29)$$

$$+ \left[ L_h \cos(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sA}(t) + [L_h \cos \theta(t)] i_{sB}(t) + \left[ L_h \cos(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sC}(t)$$

$$= L'_{\sigma_r} i'_{rb}(t) + (3/2) L_h i'_{rb}(t) + \left[ L_h \cos(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sA}(t) + [L_h \cos \theta(t)] i_{sB}(t) + \left[ L_h \cos(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sC}(t),$$

$$\Psi'_{rc}(t) = L'_{\sigma_r} i'_{rc}(t) + L_h i'_{rc}(t) + (L_h \cos \frac{2\pi}{3}) i'_{ra}(t) + (L_h \cos \frac{4\pi}{3}) i'_{rb}(t) \quad (30)$$

$$+ \left[ L_h \cos(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sA}(t) + \left[ L_h \cos(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sB}(t) + [L_h \cos \theta(t)] i_{sC}(t)$$

$$= L'_{\sigma_r} i'_{rc}(t) + (3/2) L_h i'_{rc}(t) + \left[ L_h \cos(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sA}(t) + \left[ L_h \cos(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) \right] i_{sB}(t) + [L_h \cos \theta(t)] i_{sC}(t),$$

unde  $L'_{\sigma_r}$  reprezintă inductanța totală de dispersie a înfășurării echivalente de fază rotorică, raportată la înfășurarea statorică, și unde s-a ținut seama că  $i'_{ra}(t) + i'_{rb}(t) + i'_{rc}(t) = 0$ .

Înmulțind relațiile anterioare (28)–(30), respectiv, cu  $2/3$ ,  $(2/3)\underline{a} = (2/3)e^{j2\pi/3}$  și  $(2/3)\underline{a}^2 = (2/3)e^{j4\pi/3}$ , și însumând membru cu membru relațiile astfel obținute, rezultă:

$$\begin{aligned}
\underline{\psi}'_r(t) &= (2/3)(\underline{\psi}'_{ra}(t) + \underline{a}\underline{\psi}'_{rb}(t) + \underline{a}^2\underline{\psi}'_{rc}(t)) \\
&= L'_{\sigma r}(2/3)(i'_{ra}(t) + \underline{a}i'_{rb}(t) + \underline{a}^2i'_{rc}(t) + L_m(2/3)(i'_{ra}(t) + \underline{a}i'_{rb}(t) + \underline{a}^2i'_{rc}(t)) \\
&\quad + L_h(2/3)(i_{sA}(t) + \underline{a}i_{sB}(t) + \underline{a}^2i_{sC}(t)) \left[ \cos \theta(t) + \underline{a} \cos(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) + \underline{a}^2 \cos(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) \right] \\
&= L'_{\sigma r}i'_r(t) + L_m \left[ \underline{i}'_r(t) + i_s(t) e^{-j\theta(t)} \right] = \underline{\psi}'_{\sigma r}(t) + \underline{\psi}'_m(t) e^{-j\theta(t)}, \tag{31}
\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}
&\cos \theta(t) + \underline{a} \cos(\theta(t) + \frac{2\pi}{3}) + \underline{a}^2 \cos(\theta(t) - \frac{2\pi}{3}) \\
&= \frac{1}{2} \left[ (e^{j\theta(t)} + e^{-j\theta(t)}) + e^{j2\pi/3} (e^{j[\theta(t)+2\pi/3]} + e^{-j[\theta(t)+2\pi/3]}) + e^{-j2\pi/3} (e^{j[\theta(t)-2\pi/3]} + e^{-j[\theta(t)-2\pi/3]}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ (e^{j\theta(t)} + e^{-j\theta(t)}) + (2e^{-j\theta(t)} - e^{j\theta(t)}) \right] = \frac{3}{2} e^{-j\theta(t)};
\end{aligned}$$

fazorii reprezentativi,  $\underline{\psi}'_{\sigma r}(t) = L'_{\sigma r}i'_r(t)$ , al fluxurilor magnetice de dispersie instantanee ale înfășurărilor echivalente de fază rotorice, raportate la înfășurarea statorică și  $\underline{\psi}'_r(t) = (2/3)(\underline{\psi}'_{ra}(t) + \underline{a}\underline{\psi}'_{rb}(t) + \underline{a}^2\underline{\psi}'_{rc}(t)) = \underline{\psi}'_{\sigma r}(t) + \underline{\psi}'_m(t) e^{-j\theta(t)}$ , al fluxurilor magnetice totale instantanee ale înfășurărilor echivalente de fază rotorice, raportate la înfășurarea statorică, nu definesc fazorii spațiali (cu semnificație fizică), deoarece metrica (lungime și orientare) lor nu este congruentă cu amplitudinea instantanee și unghiul polar (instantaneu) al acesteia, caracteristice vreunei unde plane progresive (învârtitoare) de mărime scalară internă rezultantă din planul secțiunii transversale a mașinii.

Este de remarcat că, în relația (31), fazorii reprezentativi  $\underline{\psi}'_r(t)$ ,  $\underline{\psi}'_{\sigma r}(t)$  și fazorii spațiali reprezentativi  $\underline{i}'_r(t)$ ,  $\underline{i}_s(t) e^{-j\theta(t)}$  și  $\underline{\psi}'_m(t) e^{-j\theta(t)}$ , din planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii, sunt reperați în sistemul de coordonate triaxial oblic, având versorii complecși  $e^{j\theta(t)}$ ,  $e^{j[\theta(t)+2\pi/3]}$  și  $e^{j[\theta(t)+4\pi/3]}$  ai axelor magnetice instantanee ale înfășurărilor echivalente de fază rotorice  $a$ ,  $b$  și, respectiv,  $c$  – axe rotitoare (în sens trigonometric direct) cu viteza unghiulară electrică instantanee de rotație a rotorului,  $\omega(t) = d\theta(t)/dt$  (Fig.3).

Ecuatiile diferențiale de tensiuni electrice instantanee de fază statorice  $u_{sA}(t)$ ,  $u_{sB}(t)$  și  $u_{sC}(t)$  ale mașinii de inducție trifazate se scriu, conform regulii – echivalente regimului energetic de motor electric, considerat regimul de referință – dipolului receptor de energie electrică de asociere a sensurilor pozitive ale tensiunii electrice instantanee de fază statorică și curentului electric de conducție ce parcurge circuitul electric al înfășurării de fază statorică respectivă:

$$u_{sA}(t) = R_s i_{sA}(t) + d\psi_{sA}(t) / dt, \tag{32}$$

$$u_{sB}(t) = R_s i_{sB}(t) + d\psi_{sB}(t) / dt, \tag{33}$$

$$u_{sC}(t) = R_s i_{sC}(t) + d\psi_{sC}(t) / dt, \tag{34}$$

unde  $R_s$  reprezintă rezistența electrică a fiecărei înfășurări de fază statorică.

Înmulțind relațiile anterioare (32)–(34), respectiv, cu  $2/3$ ,  $(2/3)\underline{a} = (2/3)e^{j2\pi/3}$  și  $(2/3)\underline{a}^2 = (2/3)e^{j4\pi/3}$ , și însumând membru cu membru relațiile astfel obținute, rezultă:

$$\underline{u}_s(t) = (2/3)(u_{sA}(t) + \underline{a}u_{sB}(t) + \underline{a}^2u_{sC}(t)) = R_s \underline{i}_s(t) + d\underline{\psi}_s(t) / dt \quad (35)$$

sau, echivalent, efectuând derivarea (în raport cu timpul) expresiei (27) a fazorului reprezentativ  $\underline{\psi}_s(t)$ ,

$$\underline{u}_s(t) = R_s \underline{i}_s(t) + L_{\sigma s} \frac{d\underline{i}_s(t)}{dt} + L_m \frac{d[\underline{i}_s(t) + (\underline{i}'_r(t)e^{j\theta(t)})]}{dt}, \quad (36)$$

unde  $\underline{u}_s(t) = (2/3)(u_{sA}(t) + \underline{a}u_{sB}(t) + \underline{a}^2u_{sC}(t))$  desemnează *fazorul reprezentativ al tensiunilor electrice instantanee de fază statorice*, și unde s-a ținut seama de definiția (18) a fazorului spațial reprezentativ  $\underline{i}_s(t)$ .

În mod analog, se scriu, conform regulii dipolului receptor de energie electrică, ecuațiile diferențiale de circuit electric ale înfășurărilor echivalente de fază rotorice – conectate în stea (cu punctul neutru (fictiv) al stelei izolat), închise în scurtcircuit și raportate la înfășurarea statorică – ale mașinii de inducție trifazate

$$0 = R'_r \underline{i}'_{ra}(t) + d\underline{\psi}'_{ra}(t) / dt, \quad (37)$$

$$0 = R'_r \underline{i}'_{rb}(t) + d\underline{\psi}'_{rb}(t) / dt, \quad (38)$$

$$0 = R'_r \underline{i}'_{rc}(t) + d\underline{\psi}'_{rc}(t) / dt, \quad (39)$$

unde  $R'_r$  reprezintă rezistența electrică a înfășurării echivalente de fază rotorică, raportată la înfășurarea statorică.

Înmulțind relațiile anterioare (37)–(39), respectiv, cu  $2/3$ ,  $(2/3)\underline{a} = (2/3)e^{j2\pi/3}$  și  $(2/3)\underline{a}^2 = (2/3)e^{j4\pi/3}$ , și însumând membru cu membru relațiile astfel obținute, rezultă:

$$0 = R'_r \underline{i}'_{-r}(t) + \frac{d\underline{\psi}'_{-r}(t)}{dt} \quad (40)$$

sau, echivalent, derivând (în raport cu timpul) expresia (31) a fazorului reprezentativ  $\underline{\psi}'_{-r}(t)$ ,

$$0 = R'_r \underline{i}'_{-r}(t) + L'_{\sigma r} \frac{d\underline{i}'_{-r}(t)}{dt} + L_m \frac{d(\underline{i}'_{-r}(t) + \underline{i}_s(t)e^{-j\theta(t)})}{dt}. \quad (41)$$

Trebuie evidențiat că, în relațiile (40) și (41), fazorul reprezentativ  $\underline{\psi}'_{-r}(t)$  și, respectiv, fazorii spațiali reprezentativi  $\underline{i}'_{-r}(t)$  și  $\underline{i}_s(t)e^{-j\theta(t)}$ , din planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii, sunt reperați în sistemul de coordonate triaxial oblic, având versorii complecși  $e^{j\theta(t)}$ ,  $e^{j[\theta(t)+2\pi/3]}$  și  $e^{j[\theta(t)+4\pi/3]}$  ai axelor magnetice instantanee ale înfășurărilor echivalente de fază rotorice  $a$ ,  $b$  și, respectiv,  $c$  (Fig.3).

Prin multiplicarea ecuațiilor diferențiale (40) și (41) cu  $e^{j\theta(t)}$  – operator de rotație (în sens trigonometric direct) cu unghiul electric rotoric instantaneu  $\theta(t)$  în planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii – se obține:

$$0 = R'_r \underline{i}'_{-r}(t)e^{j\theta(t)} + \frac{d\underline{\psi}'_{-r}(t)}{dt} e^{j\theta(t)} = R'_r \underline{i}'_{-r}(t)e^{j\theta(t)} + \frac{d(\underline{\psi}'_{-r}(t)e^{j\theta(t)})}{dt} - j \frac{d\theta(t)}{dt} \underline{\psi}'_{-r}(t)e^{j\theta(t)}, \quad (42)$$

și, respectiv,

$$\begin{aligned}
0 = & (R'_r - j \frac{d\theta(t)}{dt} L'_{\sigma r}) \underline{i}'_r(t) e^{j\theta(t)} + L'_{\sigma r} \frac{d(\underline{i}'_r(t) e^{j\theta(t)})}{dt} \\
& + L_m \frac{d(\underline{i}_s(t) + \underline{i}'_r(t) e^{j\theta(t)})}{dt} - j \frac{d\theta(t)}{dt} L_m (\underline{i}_s(t) + \underline{i}'_r(t) e^{j\theta(t)}),
\end{aligned} \tag{43}$$

unde, atât fazorul spațial reprezentativ  $\underline{i}'_r(t) e^{j\theta(t)}$ , cât și fazorul reprezentativ  $\underline{\psi}'_r(t) e^{j\theta(t)}$ , din planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii, sunt reperați – întocmai ca fazorul spațial reprezentativ  $\underline{i}_s(t)$  – în sistemul fix de coordonate cu axa reală coincidentă cu axa magnetică a înfășurării de fază statorică A.

Ecuatiile diferențiale de tensiuni electrice instantanee (36) și (43) corespunzătoare înfășurării trifazate statorice și, respectiv, înfășurării echivalente trifazate rotorice în scurtcircuit, constituie *modelul dinamic al subsistemelor electric și magnetic ale mașinii de inducție trifazate* – în forma de scriere cu variabile complexe definite prin *fazorii spațiali reprezentativi*  $\underline{i}_s(t)$ ,  $\underline{i}'_r(t) e^{j\theta(t)}$  din planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii, reperați în sistemul fix de coordonate cu axa reală coincidentă cu axa magnetică a înfășurării de fază statorică A – pentru analiza comportării mașinii în timpul proceselor tranzitorii.

### 3. CONCLUZII

Adoptând modele de comportare dinamică liniară pentru subsistemele electric și magnetic ale mașinii de inducție trifazate, în lucrare, s-a introdus conceptul de fazor spațial reprezentativ al intensităților curenților electrici din înfășurările de fază statorice, respectiv, echivalente rotorice, raportate la înfășurarea statorică – având semnificația fizică dată de metrica (lungime și orientare) reprezentării sale geometrice, în planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii, congruentă cu valoarea instantanee și poziția unghiulară polară instantanee ale amplitudinii undei plane progresive (învârtitoare) a solenației rezultante instantanee a înfășurării trifazate statorice, respectiv, a înfășurării trifazate echivalente rotorice în scurtcircuit, din planul secțiunii transversale a mașinii. În mod conexe, s-a introdus și fazorul spațial reprezentativ al fluxului magnetic resultant instantaneu din regiunea de întrefier a planului secțiunii transversale a mașinii, a cărei metrică (lungime și orientare) este congruentă cu amplitudinea instantanee și unghiul polar (instantaneu) al acesteia, caracteristice undei plane progresive (învârtitoare) a componentei scalare radiale a inducției magnetice rezultante instantanee din regiunea de întrefier a planului secțiunii transversale a mașinii. De asemenea, s-a introdus, distinct, noțiunea matematică sinoptică de fazor reprezentativ – în planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii – al fluxurilor magnetice de dispersie și totale ale înfășurărilor de fază statorice, respectiv, echivalente rotorice, raportate la înfășurarea statorică.

În final, s-a dezvoltat modelul dinamic al subsistemelor electric și magnetic ale mașinii de inducție trifazate, în fazorii spațiali reprezentativi din planul complex confundat cu planul secțiunii transversale a mașinii, reperați în sistemul fix de coordonate cu axa reală coincidentă cu axa magnetică a înfășurării de fază statorică A.

### CONFIRMARE

Lucrare a fost prezentată la *Simpozionul de Mașini Electrice – SME'22*, ediția a XVIII-a.



## BIBLIOGRAFIE

1. J. Štěpina, *Raumzeiger als Grundlage der theorie der elektrischen maschinen*, Elektrotech. Z. ETZ–A, **88**, 23, pp. 584–588, 1967.
2. D. Naunin, *The calculation of the dynamic behavior of electric machines by space phasors*, Electr. Mach. Electromech., **4**, 1, pp. 33–45, 1979.
3. Alexandrovitz, A. Zuckerberger, *Space-phasor model of a three-phase induction motor with a view to digital simulation*, Electr. Power Syst. Res., vol. 12, no. 3, pp. 157–165, 1987.
4. V.N. Nedelcu, *Teoria conversiei electromecanice*, Editura Tehnică, București, cap. 1, 6, 1978.
5. W. Leonhard, *Control of electrical drives*, 2nd ed., Springer, Berlin, Germany, ch. 10, 1996.
6. Câmpeanu, *Introducere în dinamica mașinilor electrice de curent alternativ*, Editura Academiei Române, București, cap. 1, 2, 1998.
7. N. Galan, *Mașini electrice*, Editura Academiei Române, București, cap. 3, 5, 2011.
8. J. Pyrhönen, Valéria Hrabovcová, R.S. Semken, *Electrical machine drives control: An introduction*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, UK, ch. 4, 2016.